

# Curso de electromagnetismo -Capítulo 4-Magnetostática

Rubens Amaral

*Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense*

*Av. Litorânea, S/N, Boa Viagem, Niterói, CEP.24210-340, Rio de Janeiro - Brasil*

20 de maio de 2015

# Capítulo 4

## Magnetostática

Relembrando as equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho & , & & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & e & & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

vemos que em situações estáticas a fonte do campo magnético é a densidade de corrente,  $\vec{J}$ .

O significado de  $\vec{J}$  é fluxo de carga por unidade de área. A corrente que atravessa uma superfície é dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

Daí se tira que se uma distribuição contínua de cargas apresenta densidade  $\rho(\vec{r})$  e um campo de velocidades, a velocidade média em cada ponto do espaço,  $\vec{v}(\vec{r})$ , a densidade de correntes será

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}). \quad (4.0.2)$$

Para uma carga pontual no ponto  $\vec{r}_0$  com velocidade  $\vec{V}_0$  a corrente será

$$\vec{J} = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{V}_0.$$

e para uma coleção de cargas

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \vec{V}_{\alpha}.$$

Veja que trocando a coleção discreta por um contínuo de cargas se volta à equação 4.0.2.

Como se descreve a densidade decorrente associada a um fio condutor de correntes? Troque a distribuição discreta por uma distribuição linear de cargas e obtenha

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int dl \lambda(l) \delta(\vec{r} - \vec{r}'(l)) \vec{V}(l).$$

Às vezes se precisa de descrever o fluxo de carga ao longo de uma superfície,  $\vec{K} = \sigma \vec{V}$ , e não ao longo de um fio. Supomos aqui que uma densidade superficial de cargas  $\sigma$  flui ao longo da

superfície com velocidades  $\vec{V}$ . O dicionário para trocar densidade volumétrica de corrente por densidade superficial de corrente é

$$\int dV \vec{J} \leftrightarrow \int da \vec{K} \leftrightarrow \int da \sigma \vec{V},$$

Falta um conceito importante: a noção de continuidade de cargas. É uma lei da natureza, não falseada até agora por nenhum experimento, que a carga se conserva. No que diz respeito à densidade de corrente a conservação se obtém da expressão alternativa da taxa de variação da carga em um volume, em termos da corrente que sai pela superfície do bordo do volume, e em termos da taxa de variação no tempo da densidade de cargas, ufa!:

$$\int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{dQ_V}{dt} = - \int_{\delta V} \vec{J} \cdot d\vec{a} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3r,$$

onde usamos o teorema da divergência. Obtemos então que a lei de conservação se expressa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

*Desafio: Tome para uma partícula se movendo de acordo com  $\vec{r}_0(t)$ ,  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$  e  $\vec{J}(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$  e verifique a validade da equação acima.*

Esta equação é fundamental para a consistência das equações de Maxwell. Você é convidado, talvez incentivado, induzido, intimado, a verificar que ela pode ser derivada das equações de Maxwell. No nosso caso, estaremos interessados em situações estáticas. Elas se caracterizam por  $J$  depender, possivelmente do espaço, mas não do tempo. Nesses casos se obtém

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.$$

## 4.1 Equações básicas da magnetostática

Vamos lidar com campos que não dependem do tempo e com correntes que também não dependem. Nesse caso as equações do campo elétrico e do campo magnético se desacoplam. A única relação entre elas permanece na inter-relação entre as fontes, a definição da corrente em termos de cargas (Desconfio que mesmo isso tem de ser relaxado, no caso de spin). Queremos resolver as equações

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (4.1.3)$$

A última delas é a lei de Ampère, com  $\mu_0$  a permeabilidade do vácuo. Note que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  é necessária.

Bem, como no caso da eletrostática o teorema de Helmholtz resolve a questão:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (4.1.4)$$

com

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\Delta r}. \quad (4.1.5)$$

O potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r})$  exerce na magnetostática papel análogo ao de  $\phi(\vec{r})$  na eletrostática. Parece que alegar analogia entre  $\vec{A}$  e  $\phi$  é otimismo exacerbado. Afinal por que precisamos de

3 componentes do potencial vetorial e somente uma grandeza no caso do potencial escalar para definir, em ambos os casos, campos, magnético ou elétrico, que tem 3 componentes cada? Bem, a analogia entre o potencial vetor e o potencial escalar se manifesta na liberdade de gauge. Redefinir o potencial escalar pelo acréscimo de uma constante,  $\phi' = \phi + c$ , nada muda da física. O campo elétrico é o mesmo. Utilizamos essa liberdade para calcular o potencial produzido por uma linha de cargas infinita, escolhendo o zero do potencial em uma distância finita. Da mesma maneira temos a liberdade de gauge: qualquer que seja o campo  $\psi(\vec{r})$ ,

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}),$$

dá origem ao mesmo campo magnético que  $\vec{A}$ . De fato

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi = \vec{B}.$$

**Importante:**  $\vec{A}'$  e  $\vec{A}$  são completamente equivalentes. Não há distinção física entre eles. Da mesma maneira que  $\phi$  e  $\phi'$ .

*Obs: O conjunto de transformações de gauge dos potenciais pode ser ampliado. Mesmo que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  não dependam do tempo, a redefinição conjunta*

$$\phi' = \phi - \partial_t\psi(\vec{r}, t) \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t),$$

*não muda as definições do campo elétrico e magnético, se eles são definidos por*

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Note que a expressão do potencial em termos da integral de  $\rho\frac{1}{\Delta r}$  define o potencial para uma condição de gauge específica, no caso de cargas localizadas em uma região "finita", o campo vai a zero no infinito. Da mesma maneira a expressão na eq. 4.1.5 define o potencial vetor em uma condição de gauge específica. Para entender melhor, vamos calcular a divergência de dois potenciais vetores relacionados por uma transformação de gauge.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\psi.$$

Conclusão: o valor da divergência de um potencial vetor pode ser mudado conforme o gosto do freguês. Basta ajustar o laplaciano de  $\psi$ . Qual a condição sobre a divergência de  $\vec{A}$  que está embutida na equação 4.1.5?

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \int_V d^3r \vec{J}(\vec{r}') \cdot (\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta r}) = \int_V d^3r \vec{J}(\vec{r}') \cdot (-\vec{\nabla}' \frac{1}{\Delta r}) \\ &= - \int_V d^3r \vec{\nabla}' \cdot (\vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{\Delta r}) + \int_V d^3r \frac{1}{\Delta r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = \int_{\delta V} \vec{d}a \cdot (\vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{\Delta r}). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Onde usamos o teorema da divergência e a conservação da corrente. Em geral o termo se superfície se anula, se as fontes são localizadas. Resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

A relação entre  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$  não é tão imediata como a relação entre  $\vec{E}$  e  $\phi$ . Como  $\vec{E}$  vem do gradiente de  $\phi$  a variação de  $\phi$  em um pequeno intervalo te dá informação sobre a componente de  $\vec{E}$  na direção do intervalo. Quanto a  $\vec{B}$ , aplicando o teorema de Stokes à equação 4.1.4, vemos que a integral de caminho de  $\vec{A}$  em um circuito plano fechado dá informação sobre a componente de  $\vec{B}$  ortogonal à superfície:

$$\vec{B} \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

onde usamos  $S$  para simbolizar, por licença poética, tanto a superfície, com vetor normal  $\hat{n}$ , como a medida da sua área.

### 4.1.1 Exemplos

O cálculo de  $\vec{A}$  a partir das correntes é em geral mais laborioso que o cálculo de  $\phi$  a partir das cargas. Mas em alguns casos vale a pena ressaltar as semelhanças. Vamos ver alguns casos?

**Exemplo 1: fio reto infinito com corrente** Considere um fio ao longo do eixo  $z$  portanto uma corrente  $I$ .

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' I \frac{\hat{z}}{\Delta r} = I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\hat{z}}{\sqrt{s^2 + (z - z')^2}}.$$

Epa, acho que já fizemos essa integral antes! Vamos complicar um pouco: que tal fazer a integral entre  $-L_1$  e  $L_2$ ? Pra que ganhar pouco se vamos realizar a integral? Chamando o potencial deste caso de  $\vec{A}_L$ , vamos calcular no plano  $z = 0$ , já que a dependência em  $z$  pode ser resgatada dos valores dos  $L,s$  ( imagine uma translação em  $z'$ ):

$$\vec{A}_L = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-L_1}^{L_2} dz' \frac{1}{\sqrt{s^2 + z'^2}} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s}\right) \right),$$

onde  $s^2 = x^2 + y^2$ , utilizamos a mudança de variáveis  $z = s \sinh(\theta)$ , e a função arco-seno-hiperbólico é  $\sinh^{-1}$ . Bem, comparando com o problema primo deste na eletrostática, o fio carregado, lembramos que lá fizemos uma transformação de gauge, redefinindo o zero do potencial. Aqui também fazemos isso, com  $\psi(\vec{r}) = \psi(z) = -\frac{I\mu_0}{4\pi} z \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s_0}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s_0}\right) \right)$ , com  $s_0$  uma constante.

$$\vec{A}_L(\vec{r}) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s_0}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s_0}\right) \right)$$

Calculamos o potencial vetor associado a uma "segmento de fio" reto finito. Tomando o limite  $L_1 = L_2 = \infty$ , o que somente pode ser feito após a transformação de gauge (verifique), resulta que o potencial vetor de um fio infinito é

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right).$$

Daí, o campo magnético, usando a expressão do rotacional em coordenadas cilíndricas, será

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}.$$

O potencial vetor é paralelo ao fio e o campo magnético tem suas linhas de campo fazendo voltas circulares ao redor do fio. Este é o comportamento padrão dos campos  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , que deve fazer parte do seu arsenal intuitivo.

**Exemplo 2 - Campo de um plano** Esse exemplo é teoricamente importante. Um plano de cargas uniformemente carregado, densidade  $\sigma$ , plano xy, é posto em movimento com velocidade constante,  $v$ , da direção  $\hat{x}$ . Cria-se uma densidade superficial de correntes,  $\vec{K} = K\hat{x} = \sigma\hat{v}$ . Só temos de calcular a componente  $x$ , e usamos  $s^2 = x^2 + y^2$ :

$$A_x(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty, -\infty}^{\infty, \infty} dx dy \frac{K}{\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^\infty s ds \frac{K}{\sqrt{z^2 + s^2}} =$$

"Peraí"! Faz uma transformação de gauge antes de calcular o limite a infinito. Explicando: tomamos a integral de  $s=0$  até  $s=S$ , e depois fazemos  $S \rightarrow \infty$ . Antes, com  $S$  fixo, escolhemos  $\psi(x) = -x \frac{\mu_0}{2} \int_0^R s ds \left( \frac{K}{\sqrt{z_0^2 + s^2}} \right)$  e acrescentamos  $\vec{\nabla}\psi$  ao  $\vec{A}$ . Após essa transformação de gauge tomamos o limite a infinito:

$$\begin{aligned} A_x(z) &= \frac{\mu_0}{2} \int_0^\infty s ds \left( \frac{K}{\sqrt{z^2 + s^2}} - \frac{K}{\sqrt{z_0^2 + s^2}} \right) = \frac{\mu_0 K}{2} \lim_{S \rightarrow \infty} \left( \sqrt{s^2 + z^2} - \sqrt{s^2 + z_0^2} \right) / S \\ &= \frac{\mu_0 K}{2} \lim_{S \rightarrow \infty} \left( S \left( \sqrt{1 + \left( \frac{z}{S} \right)^2} - \sqrt{1 + \left( \frac{z_0}{S} \right)^2} \right) - |z| + |z_0| \right) = \frac{\mu_0 K}{2} (|z_0| - |z|) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Veja que a transformação de gauge permitiu realizar o limite quando  $s \rightarrow \infty$ . É mais econômico escolher  $z_0 = 0$ . Note que esse cálculo é estritamente análogo ao cálculo do potencial criado por um plano infinito uniformemente carregado ( $A_x \rightarrow \phi$ ;  $\mu_0 \rightarrow 1/\epsilon_0$ ;  $K \rightarrow \sigma$ ).

O rotacional de  $\vec{A}$  nos dá

$$\vec{B} = -\hat{y} \frac{\mu_0 K}{2} \frac{|z|}{z}.$$

O campo resultante não depende do módulo da distância ao plano. O que me chama mais a atenção nesse resultado, é o módulo aparecer! Significa algo muito importante: A componente  $y$  do campo magnético sofre uma descontinuidade ao atravessar o plano  $z = 0$  no qual há uma corrente na direção  $\hat{x}$ ! Em bom português:

$$\Delta \vec{B} \cdot (\hat{K} \times \hat{n}) = \mu_0 K$$

ou

$$\hat{n} \times \Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{K}.$$

Aqui  $\hat{n}$  é o vetor normal à superfície onde flui a corrente superficial  $\vec{K}$ . Essa descontinuidade é um fato da vida, do mesmo modo que a descontinuidade da componente normal de  $\vec{E}$  ao atravessar um plano carregado.

**Exemplo 3: espira circular** Fig. 4.1.

Nesse caso é um tanto chato de calcular o  $\vec{A}$ . Um pouco mais de atenção é necessária. Imagine um círculo de raio  $R$ , no plano  $z = z_0$ , centrado no eixo  $z$  e portando cargas, densidade linear  $\lambda$ . Ele é posto a girar, velocidade angular  $w$ , em torno do seu eixo. Resulta um círculo de corrente,  $I =$

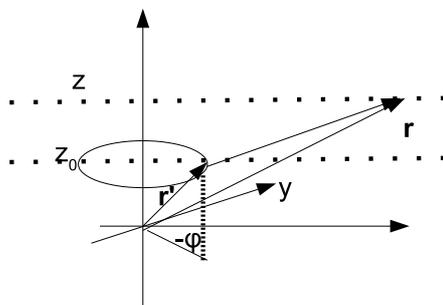


Figura 4.1: Espira de corrente.

$\lambda w R$ . Podemos calcular o potencial vetor no plano  $xz$ , sem perda de generalidade. A componente  $A_z$  é identicamente nula e a  $A_x$  também se anula por simetria já pontos do círculo em posições opostas ao plano  $xz$  ( $y \leftrightarrow -y$ ) contribuem com sinais trocados. A única componente relevante é  $A_y$ . Chamando o ângulo azimutal de  $\varphi$  temos  $I_y = I \cos \varphi$ ,  $\Delta \vec{r} = (z - z_0)\hat{z} + (x - R \cos \varphi)\hat{x} + R \sin \varphi \hat{y}$ ,

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \cos \varphi R d\varphi}{\Delta r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \cos \varphi R}{\sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2 - 2xR \cos \varphi}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \xi \quad (4.1.8)$$

com  $\xi = \int_0^\pi \frac{R \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta \cos \varphi}}$ ,  $\alpha = \sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2}$  e  $\beta = 2xR$ , sendo expressa como uma integral elíptica. Não existe uma expressão como funções algébricas. O importante é notar que  $\vec{A} = f(x, z)\hat{y}$ , que generalizando para qualquer ponto, e não para pontos exclusivamente no plano  $xz$ , resulta  $\vec{A} = f(s, z)\hat{\varphi}$ . Daí se obtém

$$\vec{B} = -\frac{\partial f}{\partial z} \hat{r} + \frac{1}{s} \frac{\partial (sf)}{\partial s} \hat{z}.$$

O limite quando  $x$  é muito pequeno pode ser obtido. Expandindo o integrando nesse limite resulta

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{xR^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que se generaliza para todo o espaço como

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{sR^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

O rotacional fornece, para pontos no eixo  $z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}.$$

Com algum trabalho, obtivemos a expressão do campo magnético ao longo do eixo de simetria do círculo.

**Exemplo: casca esférica uniformemente carregada e girando** Esse caso dá um tanto de trabalho mas o resultado final é muito importante. Vamos começar descrevendo num sistema de

coordenadas em que  $\tilde{z}$  aponta na direção do eixo em torno do qual a esfera gira, e no qual o ponto de observação é escolhido estar no plano  $\tilde{y} = 0$ .

O ponto de partida será tomar  $I_j \rightarrow RK_j \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta}$ , ou  $I_j d\tilde{\varphi} \rightarrow RK_j \sin \tilde{\theta} d\tilde{\Omega}$  na expressão da espira

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{dI_i R d\varphi}{\Delta r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} K_i \frac{d\tilde{\Omega} R^2}{\sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2 - 2xR \cos \tilde{\varphi}}} \quad (4.1.9)$$

Agora em vez de continuar com esse sistema de coordenadas, escolhemos um sistema em que o eixo  $z'$  aponta na direção do ponto de observação  $\vec{r} = z\hat{z}'$ . Nesse sistema temos, chamando de  $\theta$  o ângulo entre o eixo  $z$  e a velocidade angular, lembrando que  $\vec{K} = \sigma\vec{\omega} \times \vec{r}'$ ,

$$\vec{\omega} = (\omega \sin \theta, 0, \omega \cos \theta); \vec{r}' = (R \sin \theta' \cos \varphi', R \sin \theta' \sin \varphi', R \cos \theta')$$

$$\vec{K} = (\sigma\omega R)(-\cos \theta \sin \theta' \sin \varphi', -\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta \sin \theta' \sin \varphi')$$

A vantagem é que a raiz no denominador do integrando se torna simplesmente  $\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta'}$ . A integral em  $d\varphi'$  aniquila quase todas as contribuições, lineares em  $\sin \varphi'$  e em  $\cos \varphi'$ . Resulta somente a integral, lembrando que  $d\tilde{\Omega} = d\Omega$ ,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{-R^3 \mu_0 \sigma \omega \sin \theta}{4\pi} \int d\Omega' \frac{\cos \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta'}} = \frac{-\mu_0 R^3 \sigma \omega}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu \mu}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\mu}} \\ &= \frac{\mu_0 R \sigma \omega}{6r^2} [(R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - rr)(R + r)] \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Daí

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 R \sigma}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}, \text{ Se } r < R, \text{ e} \\ &= \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}, \text{ Se } r > R. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

O campo magnético obtido calculando o rotacional, resulta uniforme para  $r < R$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \hat{z}, \text{ Se } r < R, \text{ e} \\ &= \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{\omega}), \text{ Se } r > R. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Esse resultado é muito parecido com o campo elétrico de uma casca esférica carregada proporcionalmente a  $\cos \theta$ , não é mesmo? Compare os dois resultados.

## 4.2 Lei de Ampère

Só para lembrar: iniciamos com a lei de Ampère, mas se a houvéssemos esquecido podemos resgatá-la do potencial vetor como segue.

Primeiro um resultado fantástico: cada componente de  $\vec{A}$  satisfaz à Lei eq. Poisson com a componente da corrente substituindo a densidade de cargas. Demonstração? Tome a componente  $A_i$  e expresse-a

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{J_i}{\Delta r}. \quad (4.2.13)$$

Essa é a mesma expressão do potencial escalar,  $A_i \leftrightarrow \phi$ , em termos de  $\rho$ ,  $J_i \leftrightarrow \rho$ , substituindo  $\epsilon_0 \leftrightarrow \frac{2}{\mu_0}$ . Resulta

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Essa pode ser chamada de Lei de Ampere diferencial para o potencial vetor.

Tomando agora o rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

Ou, seja, a lei de Ampere. A lei de Ampere pode ser posta em forma integral, assim como a lei de Gauss pode ser diferencial ou integral:

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_S d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \int_{\delta S} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Observe a analogia: Eletrostática: Lei de Coulomb  $\leftrightarrow$  Lei de Gauss ( Formas diferencial ou integral).

Magnetostática: Lei de Bio-Savart  $\leftrightarrow$  Lei de Ampere ( Formas diferencial ou integral).

Como assim, Lei de Bio-Savart? De fato a equação 4.2.13 nada mais é que a lei de Bio-Savart escrita em termos do potencial vetor:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\delta r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{\nabla} \left( \frac{1}{\Delta r} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2}. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Essa última expressão para  $B$  expressa a lei de Bio-Savart, que pode assumir diversas formas:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int da' \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dl' \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2}, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

onde foi possível fatorar  $I$  na última expressão devido à conservação da corrente. A lei de Biot-Savart representa para a magnetostática o mesmo que a lei de Coulomb representa para a Eletrostáticas.

A lei de Biot-Savart também nos mostra um importante aspecto do campo magnético: ele não é um vetor, mas um pseudo-vetor. Um vetor inverte os valores das suas componentes quando invertemos todos os pontos em relação à origem,  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Ora, tanto  $\Delta\vec{r}$  como  $\vec{J}$  são vetores. Como eles invertem os sentidos, e o  $\vec{B}$  é composto do produto(vetorial) dos dois,  $\vec{B}$  não muda.

É fácil aplicar diretamente a equação de Biot-Savart em alguns casos. Veja o fio infinito ao longo do eixo z com o campo calculado inicialmente no ponto (x, y=0, z=0).  $d\vec{l}' = dl'\hat{z}$ ,  $\Delta\vec{r} = -z'\hat{z} + x\hat{x}$ ,  $d\vec{l}' \times \Delta\vec{r} = -x\hat{y}$ , e

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dz'}{(x^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A transformação  $z' = x \sinh \theta$  resolve a parada trivialmente,  $B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ , ou, em todo o espaço,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{e}_\varphi.$$

Espera aí! Novamente fizemos a integral? Melhor fazer para  $z'$  iniciando em  $-L_1$  e terminando em  $L_2$ :

$$\vec{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \left( \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + s^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + s^2}} \right) \hat{e}_\varphi.$$

Observe que o campo magnético para o fio infinito pode ser obtido ainda por um terceiro método. Por simetria  $\vec{B} = \hat{e}_\varphi B(s)$ . Agora usando a lei de Ampere na forma integral resulta, para um circuito de integração circular de raio s,

$$\mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} s B(s) = 2\pi s B(s),$$

simples, não? **Por favor** preste a máxima atenção para a forma como a simetria foi utilizada! A simetria é usada primeiro, depois a integral é realizada. A integral não determina a forma simples de  $B$ . A simetria ou faz! A vontade que a integral seja trivial não é argumento para que ela o seja! A simetria nesse caso sugere que  $\vec{B}$  dê voltas em torno do fio, e não que aponte radialmente como no caso de  $\vec{E}$ .

Exercício: Utilize a lei de Biot-Savart (para  $\vec{B}$ ) para obter o campo magnético de uma espira circular em pontos no eixo de simetria.

### 4.3 Resumo

O quadro na Fig. 4.2 mostra o conjunto de inter-relações entre os campos.

Compare com o quadro análogo no caso da eletrostática.

### 4.4 Mais alguns exemplos de aplicação da Lei de Ampere

Observação: Aplicar cuidadosamente as condições de simetria. Notar que o campo magnético é pseudo-vetor e não vetor.

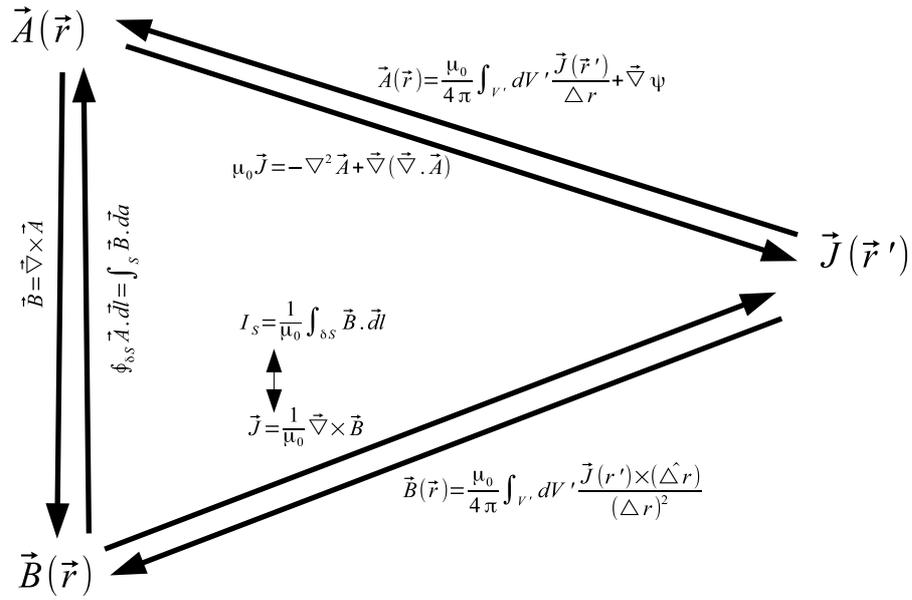


Figura 4.2: Quadro resumo Magnetostática.

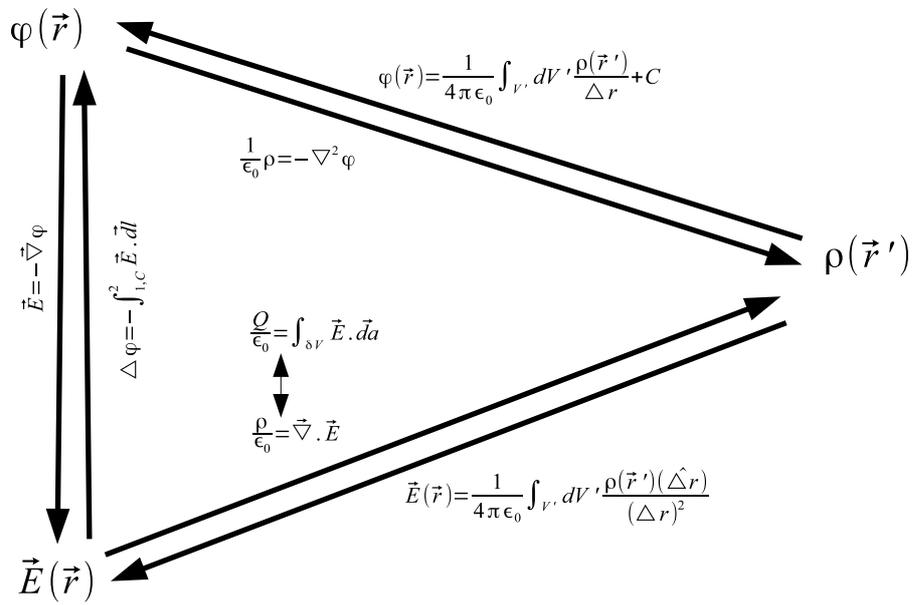


Figura 4.3: Quadro resumo Eletrostática.

Campo de um plano- O plano  $y = 0$  porta densidade superficial de corrente na direção  $z$ ,  $\vec{K} = K\hat{z}$ . Por simetria podemos supor  $\vec{B} = B(y)\hat{x}$ . Tomando amperiana sendo circuito retangular com lados compridos de cada lado do plano e os lados curtos atravessando o plano, obtemos  $B(0^+) - B(0^-) = \mu_0 K$ . A solução mais simples é  $\vec{B} = \mu_0 K \hat{x} \frac{y}{|y|}$ .

Campo de Solenoide infinito. Uma casca cilíndrica com carga superficial  $\sigma$ , de raio  $R$ , gira com velocidade angular  $w$  em torno do seu eixo,  $\hat{z}$ . A corrente superficial resultante é  $\vec{K} = \sigma R w$ . Por simetria,  $\vec{B} = B(s)\hat{z}$ . Escolhendo amperianas retangulares com lados grandes da direção  $z$  e curtos na direção radial cilíndrica, resulta que  $B(s)$  é constante tanto no interior como no exterior do cilindro. A descontinuidade obtida quando um lado da amperiana está em  $R^+$  e o outro em  $R^-$  nos dá que  $B = \mu_0 K \theta (R - s)$ .

*Tratamento alternativo para o campo gerado por um solenoide: Cálculo diretamente do potencial vetor. Já vimos que uma casca cilíndrica carregada com  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  gera um campo em todo o espaço descrito como  $\phi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \cos \theta \times f(r)$  onde  $f(r) = r$  para  $r < 0$  e  $f(r) = \frac{R^2}{r}$  para  $r > 0$ . Ora, o potencial vetor é gerado de maneira análoga ao potencial, substituindo  $\sigma$  por  $K_i$  para cada componente  $A_i$  e  $\epsilon_0$  por  $1/\mu_0$ . Basta notar que  $K_x = -K \sin \theta = -k \sin(\pi/2 - \theta)$  e  $K_y = K \cos \theta$  e se obtém então diretamente a expressão do potencial vetor*

$$\vec{A} = \frac{K \mu_0 R^2}{2r} (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y})$$

, para  $r > R$  e

$$\vec{A} = \frac{K \mu_0 r}{2} (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y})$$

, para  $r < R$ . Daí se obtém o mesmo campo magnético que obtivemos pela lei de Ampere. O potencial vetor fora do cilindro é dado pelo gradiente do ângulo azimutal, ou seja, é um campo "puro gauge", cujo rotacional é nulo.

Campo de um cilindro com movimento ao longo do eixo.

Caso parecido com o anterior. Por simetria,  $\vec{B} = B(s)\hat{\phi}$ . Amperianas circulares de raio  $r$  centradas no eixo do cilindro. Resulta  $B(s) = \mu_0 K \frac{s}{R} \theta (s - R)$ . Repare na descontinuidade, de uma componente tangencial, em  $s = R$ . Note que se pode obter pelo mesmo raciocínio acima: a analogia com o caso elétrico permite obter diretamente a expressão de  $A_z$ ,  $A_z = -\mu_0 K \ln(r/R)$ , para  $r > R$ , e nulo para  $r < R$ .

*Tratamento alternativo do potencial de uma casca esférica girando. A densidade de corrente é dada por  $K_\phi = \sigma w R \sin \theta$ . Tanto para  $r < R$ , como para  $r > R$  o campo magnético terá divergência e rotacional nulos, já que a fonte está em  $r = R$ . Portanto podemos definir um campo escalar,  $\phi$ , em cada uma das regiões de modo que  $\vec{B} = -\vec{\nabla} \phi$ . Trate o  $\phi$  em cada região como tratou o campo escalar, com simetria azimutal e separação de variáveis em coordenadas esféricas. Somente mudam as condições de contorno em  $r = R^\pm$ . Dá para ver que somente o primeiro polinômio de Legendre comparece. A condição de contorno nova é a descontinuidade da componente  $B_\theta$ , enquanto a componente normal é contínua. O cálculo de  $B_\theta$  leva a termo proporcional a  $\sin \theta$  que fatora com o mesmo seno presente na densidade de corrente. Fica para o leitor preencher os detalhes.*

## 4.5 Força de Lorentz

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}).$$

Obs: quando realizamos transformação de Lorentz, levando em conta a relatividade, os campos elétricos e magnéticos são transformados em conjunto\*. Esse argumento sugere ver a força de Lorentz como um conjunto, e não como forças separadas.

Exercício: Mostre a a força de Lorentz pode ser escrita como

$$F_i = q (E_i + v_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i)).$$

A quantidade  $F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i$  define um forma alternativa(tensorial) de expressar o campo magnético:  $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$  e  $B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}$ . Há vantagens em usar essa nova notação: Ele é parte do Tensor de Maxwell que possibilita formulação simples da eletrodinâmica, as propriedades sob transformações de Lorentz são mais claras, ele é um tensor, enquanto  $\vec{B}$  não é exatamente um vetor, mas um pseudo-vetor†.

*Provocação: qual a descrição lagrangeana da dinâmica da partícula que leva a essa força? Encontre as equações de Euler-Lagrange para o lagrangeano expresso como*

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + q (\vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} - \phi(\vec{r})) = \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i + q (A_i(x) \dot{x}_i - \phi(x))$$

Obs: Atuando sobre partículas carregadas em movimento de translação ( e coletâneas delas) o campo magnético não realiza trabalho.

Exemplo: 1) Movimento ciclotrônico. Campo magnético uniforme na direção z.  $QV_{xy}B_z = mV_{xy}^2/R$ . Componente  $x_z$  em movimento uniforme.

2) Cicloide:  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  uniformes com  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ .  $B_i = B\delta_{i3}$ ,  $E_i = E\delta_{i1}$ .

$$F_i = Q(\delta_{i1} + \epsilon_{ijk} V_j \delta_{k3}) = Q(E\delta_{i1} + B\epsilon_{ij3} V_j)$$

Resulta:  $V_3$  constante. As equações das componentes x e y são simplificadas escolhendo definir  $w \equiv QB/M$  e  $V \equiv E/B$  ( os nomes dessas constantes e das demais são motivadas por análise dimensional). Resulta

$$\ddot{x} = wv + w\dot{y}; \quad \text{e} \quad \ddot{y} = -w\dot{x}.$$

As equações acima ficam escritas como uma única, quando expressas em termos da variável complexa  $Z = x + iy$ ,  $\ddot{Z} = w(V - i\dot{Z})$ . O termo  $wV$  some com  $Z \rightarrow Z' = Z + iVt$ :

$$\ddot{Z}' = -iw\dot{Z}',$$

---

\*Alguns problemas de magnetostática, como o fio reto, o plano de correntes ou mesmo um cilindro com corrente fluido longitudinalmente, podem ser resolvidos simplesmente fazendo a transformação de Lorentz do caso eletrostático análogo.

†A consideração de que o campo magnético é um pseudo-vetor está implícita na construção dos campos a partir da simetria dos problemas quando solucionamos problemas com a lei de Ampere. Por exemplo, para um fio infinito no eixo z, o argumento de  $\vec{B}$  ser pseudo-vetor elimina a componente de B nas direção z

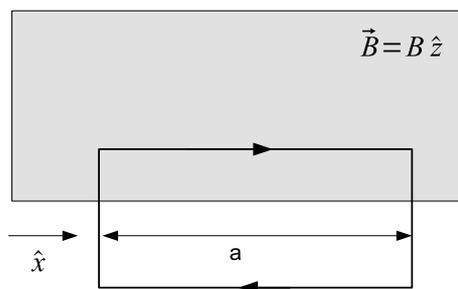


Figura 4.4: circuito retangular.

que tem solução imediata,  $\dot{Z}' = e^{-i\omega t} \dot{Z}_0$ . Escrevendo a constante complexa  $\dot{Z}_0 = -i\omega e^{i\phi_0} R$ , e integrando em relação ao tempo obtemos  $Z' = e^{-i\omega t + i\phi_0} R + Z_0$ , onde  $Z_0$  é a nova constante de integração. Expressando em termos de  $Z$ ,

$$Z = e^{-i(\omega t - \phi_0)} R + Z_0 - iVt.$$

Tomando as partes Real e imaginária, e escrevendo  $Z_0 = x_0 + iy_0$  resulta

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\phi_0 - \omega t) + x_0 \\ y &= R \sin(\phi_0 - \omega t) + y_0 - Vt = R \sin(\phi_0 - \omega t) + y_0(t). \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Agora ficou clara a interpretação: A partícula executa movimentos circulares de raio  $R$ , no sentido anti-horário, com velocidade angular  $\omega$  cujo centro, em  $(x_0, y_0(t))$ , se move ao longo de uma reta na direção  $y$ , com velocidade  $-V$ , passando por  $(x_0, y_0)$  no tempo inicial.

Força sobre correntes( dicionário):

$$Q\vec{V} \leftrightarrow \vec{J}dV \leftrightarrow \vec{K}da \leftrightarrow \vec{I}dl = I\vec{dl}$$

Exemplos: 1)um circuito retangular com um lado imerso num campo uniforme que vai a zero abruptamente. Fig 4.4.

$$\vec{F} = IaB\hat{y}$$

Problema: Encontre a força no circuito retangular da figura 4.5

2) Força, por unidade de comprimento, entre fios infinitos paralelos: Força exercida por (1) em (2):

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = -\hat{x} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

$$\vec{f}_2 = -\hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d},$$

sentido atrativo se  $I_1 I_2 > 0$ .

Problema: encontre a força por unidade de área que um plano de correntes exerce em outro. Considere as correntes e os planos paralelos.

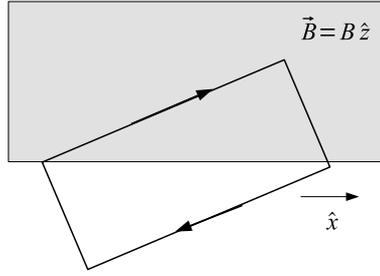


Figura 4.5: circuito retangular.

## 4.6 Expansão em multipolos

A expansão em multipolos pode ser obtida repetindo o processo feito no caso da eletrostática:

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\Delta r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos(\theta)) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{r^2} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \hat{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^3} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \left(-\frac{1}{8}\right) (3(\vec{r}' \cdot \hat{r})^2 - r'^2) + \dots \right] \tag{4.6.17}
 \end{aligned}$$

$$= \left[ \vec{A}_{\text{monopolo}} + \vec{A}_{\text{dipolo}} + \vec{A}_{\text{quadrupolo}} + \dots \right] \tag{4.6.18}$$

Descritos dessa maneira as expressões não são muito fáceis de entender. Vamos reescrever cada termo. Primeira diferença: O primeiro termo é nulo, ou seja, não há monopolo magnético.

$$\int dV J_i = \int dV J_j \delta_{ij} = \int dV J_j \partial_j x_i = \int dV (\partial_j (J_j x_i) - x_i \partial_j J_j) = 0,$$

já que a corrente se conserva,  $\partial_j J_j = 0$  e é localizada, portanto usando o teorema da divergência o termo com derivada total é nulo.

Do mesmo modo, podemos reescrever o termo de dipolo repetindo o uso do teorema de divergência e da conservação da corrente,

$$\int dV x_k J_i = \int dV x_k J_j \partial_j x_i = \int dV (\partial_j (x_k J_j x_i) - x_i \partial_j (x_k J_j)) = - \int dV x_i (\partial_j x_k) J_j = - \int dV x_i J_k.$$

Essa identidade pode ser interpretada de maneira simples: a expressão  $x'_i J_j(\vec{r}')$  se comporta como um símbolo antissimétrico nos índices  $ij$ , após a integração em  $dV'$ . Traduzindo em símbolos:  $x'_i J_j(\vec{r}') \approx -x'_j J_i(\vec{r}') \approx \frac{1}{2}(x'_i J_j(\vec{r}') - x'_j J_i(\vec{r}'))$ . Conclusão importante sobre o termo de dipolo magnético:  $\vec{A}_{\text{dipolo}}$  é ortogonal a  $\vec{r}$ . De fato se quisermos calcular  $\vec{A}_{\text{dipolo}} \cdot \vec{r}$ , teremos de obter a integral em  $d^3 r'$  de  $r_i J_i(\vec{r}') r_j r'_j = (r_i r_j)(J_i r'_j)$ . Mas, o primeiro fator é simétrico enquanto o último é antissimétrico sob integração ( após integrado). Como a soma em ambos os índices ( contração) de um símbolo simétrico com um antissimétrico é identicamente nula, resulta a ortogonalidade procurada. Por ser ortogonal a  $\vec{r}$  deve ser possível então escrever o  $\vec{A}_{\text{dipolo}}$  como o produto

vetorial de  $\vec{r}$  por outro termo. De fato, no cálculo do potencial vetor de dipolo, precisamos integrar  $J_i(\vec{r}')r'_j r_j$  em  $d^3r'$ . Mas ( $\approx$  significa iguais sob integração):

$$(r'_j J_i) \approx (r'_j J_i - r'_i J_j) = \frac{1}{2} r'_m J_n (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}) = \frac{1}{2} r'_m J_n \epsilon_{ijk} \epsilon_{nmk} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\vec{r}' \times \vec{J})_k,$$

Portanto

$$r_j (r'_j J_i) \approx \frac{-1}{2} r_j \epsilon_{ijk} (\vec{r}' \times \vec{J})_k = \frac{1}{2} ((\vec{r}' \times \vec{J}) \times \vec{r})_i.$$

Resulta então

$$\vec{A}_{\text{dipolo}} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{m} \times \hat{r}, \quad (4.6.19)$$

com

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dV' \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (4.6.20)$$

sendo chamado o momento de dipolo magnético. ‡

O cálculo do rotacional deste potencial pode ser feito imediatamente usando novamente a regra para contração simples de duas  $\epsilon$ 's resultando em

$$\vec{B}_{\text{dipolo}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \right).$$

Mutatis-mutantibus, é a mesma expressão encontrada na eletrostática. Compare! Será que falta alguma coisa? De fato, por razões análogas:

$$\vec{B}_{\text{dipolo}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} + \frac{8\pi\vec{m}}{3} \delta(\vec{r}) \right).$$

O momento de dipolo magnético de um circuito fechado ( $\vec{J}dV' \rightarrow Id\vec{l}'$ ) tem uma interpretação simples

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r} = I\vec{S}.$$

Aqui  $\vec{S}$  tem uma interpretação geométrica: é a **área vetorial** da superfície que tem  $C$  como bordo. No caso de circuito planar a área vetorial tem por módulo a área da superfície interior ao circuito

---

‡Na verdade o argumento é bem geral. Dado um vetor qualquer,  $\vec{m}$ , com componentes  $m_i$  podemos associar a ele, sempre, um símbolo antissimétrico (tensor)  $\tilde{m}$ , com componentes  $\tilde{m}_{ij} \equiv \epsilon_{ijk} m_k$ . Daí obtemos, pelo produto de duas  $\epsilon$ s,  $m_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \tilde{m}_{ij}$ . Assim, usar  $\vec{m}$  ou  $\tilde{m}$  é completamente equivalente. No caso do momento de dipolo magnético, a definição mais direta à qual chegamos foi dada na realidade por

$$\tilde{m}_{ij} = \frac{1}{2} \int dV' (x'_i J_j - x'_j J_i),$$

e não diretamente por 4.6.20, de tal forma que

$$A_i \text{ dipolo} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} r_j \tilde{m}_{ji},$$

que é equivalente a 4.6.19. O vetor momento de dipolo,  $\vec{m}$  é então derivado, a partir dessa definição usando  $m_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \tilde{m}_{jk}$ . Mais uma observação: a correspondência mais precisamente é **pseudo-vetor**  $\leftrightarrow$  **tensor** e **vetor**  $\leftrightarrow$  **pseudo-tensor**.

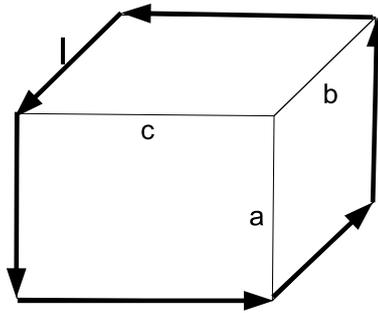


Figura 4.6: Circuito não plano

e aponta na direção normal com sentido dado pela regra da mão direita. Como não há monopolo magnético, esperamos que o momento de dipolo não dependa da origem. Lembra-se do argumento análogo na eletrostática? De fato uma mudança de origem muda  $\vec{r}$  por um vetor constante,  $\vec{D}$ , e  $\oint \vec{D} \times d\vec{r} = \vec{D} \times \oint d\vec{r} = 0$ .

*Problema:* demonstre que o momento de dipolo não depende da origem no caso geral de uma densidade de correntes volumétrica.

Do mesmo modo que no caso elétrico, podemos falar de um dipolo pontual, basta tomar a área do circuito indo a zero ao mesmo tempo em que o seu produto pela corrente é constante.

*Problema:* Para uma carga pontual o momento de dipolo magnético é  $q\vec{r} \times \vec{V}$ . Mostre que para uma coletânea de cargas pontuais com a mesma relação carga massa se encontra  $\vec{m} \propto \vec{L}$ , onde  $\vec{L}$  é o momento angular e encontre a constante de proporcionalidade.

*Problema:* Uma corrente  $I$  flui ao longo das arestas de um dos triângulos de um paralelepípedo, Fig. 4.6. Encontre o momento de dipolo magnético e descreva o campo magnético longe do paralelepípedo.

A noção de momento de dipolo é extremamente importante. Do ponto de vista prático, para descrever o campo magnético encontrado em diversos tipos de materiais, entender a relação entre o campo aplicado e os dipolos magnéticos induzidos é essencial. De um ponto de vista da descrição das partículas elementares, se observa que o elétron apresenta um momento de dipolo magnético intrínseco, associado ao spin. Apesar de ser útil visualizar o spin, que é momento angular, e o seu momento de dipolo magnético associado, como devidos à rotação do elétron em torno de si mesmo, ao final de tudo temos que o spin é uma nova variável dinâmica, que tem uma descrição fundamentalmente quântica. Meu ponto de vista é esse: o campo magnético tem origem em movimentos de cargas **e** em spin's.